

Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Progymnasiums
zu Lauenburg i. Pom.

Ostern 1894.

Die Durchführbarkeit
der
neuen Lehrpläne in der Mathematik
bis zur Abschlussprüfung.

Von

C. Frenzel,
Oberlehrer.

Leipzig,
Gustav Fock,
1894.

1894. Programm Nr. 137.

Durch die neuen „Lehrpläne und Lehraufgaben“ vom 6. Januar 1892 ist der Umfang des mathematischen Pensums für Progymnasien (und für die entsprechenden Klassen der Vollgymnasien) nicht unwesentlich erweitert worden, während die Anzahl der mathematischen Lehrstunden genau dieselbe geblieben ist wie früher. Durch diese Vermehrung des Unterrichtsstoffes, welche den Zweck hat, den vielen aus IIB abgehenden Schülern eine wenigstens einigermassen abgeschlossene mathematische Vorbildung zu verschaffen, fällt insbesondere der IIB eine sehr umfangreiche Lehraufgabe zu, die nach der Ansicht vieler Fachkollegen in einem Jahre nicht bewältigt werden kann. Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle diese in verschiedenen Aufsätzen*) ausgesprochenen ungünstigen Beurteilungen der neuen Lehrpläne zu widerlegen, was bereits von anderer Seite, am ausführlichsten von Herrn Direktor Holzmüller in der Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen (Januarheft 1893) und in der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht (24. Jahrgang, Heft 2) geschehen ist. Vielmehr beabsichtige ich, die Durchführbarkeit der neuen Lehrpläne für den mathematischen Unterricht durch den Hinweis auf einige Erfahrungen aus der Praxis des Unterrichts, durch eine genaue Abgrenzung des erreichbaren Zieles, sowie endlich durch eine von der gebräuchlichen Behandlung abweichende Darstellung der grundlegenden Abschnitte aus der Planimetrie und Arithmetik, wie sie zur Festlegung einer sicheren Grundlage geeignet sein dürfte, darzuthun.

Die Lehraufgabe der IIB umfasst fast lauter Gebiete, die einem Schüler, der diese Klasse mit Erfolg besucht hat und dann die Schule verlässt, in seinem späteren Berufsleben von grosser praktischer Bedeutung sein können. Die Berechnung des Kreisumfanges und Inhalts, die Berechnung zusammengesetzter Zahlenausdrücke mittels Logarithmen (insbesondere auch die Lösung der einfachsten Aufgaben aus der Zinseszinsrechnung), die trigonometrische Berechnung von Dreiecken durch blosse Anwendung der Definition der trigonometrischen Funktionen und der Logarithmentabelle dieser Funktionen, endlich die Berechnung der Oberflächen und Inhalte der einfachsten Körper mit Einschluss von Cylinder, Kegel und Kugel gehören zu dem unentbehrlichsten Rüstzeug für manchen praktischen Beruf; der Nichtbesitz dieser Kenntnisse macht einen jungen Mann, der mit der Erwerbung des Einjährig-Freiwilligen-Zeugnisses seine Schullaufbahn beschliesst, minderwertig für viele Lebenslagen. Wenn irgendwann und irgendwo der Ausspruch: „Non scholae sed vitae discimus“ eine Berechtigung gehabt hat, so hat er dieselbe im jetzigen Zeitalter und auf dem Gebiete der Mathematik. Warum sollen wir denn, dem Prinzip eines streng logischen Aufbaues der Wissenschaft zu Liebe, unseren Schülern die Kenntnis dieser nützlichen Lehren vorenthalten, warum

---

*) Vgl. 1) die Beurteilungen der neuen Lehrpläne für den mathematischen und naturw. Unterricht in der Hoffmann'schen Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, 23. Jahrg. (1892) S. 33 u. f., S. 171 u. f., S. 401 u. f. und S. 502, und

2) die Abhandlung „Der neue preussische Lehrplan für Mathematik im Gymnasium“ von M. Simon in der Zeitschrift für das Gymnasialwesen 47. Jahrg. (1893) S. 593 u. f.

sollten wir sie noch länger in Kenntnissen üben, die zwar zu einem vollständigen und systematischen Ausbau der elementaren Mathematik absolut nötig, doch zu einer unmittelbar praktischen Verwertung nicht geeignet sind? In dieser Hinsicht ist durch die neuen Lehrpläne ein entschiedener und freudig zu begrüssender Fortschritt zum Besseren eingetreten, und dass dieselben durchführbar sind, hat meiner Ansicht nach die Erfahrung der beiden letzten Jahre bereits bewiesen.

Freilich ist die Bewältigung dieser grossen Lehraufgabe des II B innerhalb eines Jahres nur dann möglich, wenn in den früheren Klassen die denselben zuerteilten Pensen, die ja die Bausteine für das in II B zu errichtende Lehrgebäude bilden, voll und ganz erledigt sind. „Die strenge Einhaltung der Jahreskurse“, heisst es in den methodischen Bemerkungen zu den neuen Lehrplänen (S. 50), „ist unerlässliche Forderung. Da auf dem mathematischen Gebiete schwerer, als auf einem anderen, Lücken im elementaren Wissen und Können sich durch Privatfleiss ersetzen lassen, und da die Schwierigkeit, welche dieser Unterricht in den oberen Klassen zuweilen macht, erfahrungsmässig fast ausnahmslos auf Lücken in den Grundlagen beruht, so wird gewissenhafte Strenge in der Versetzung zu einer um so dringenderen Pflicht gegen die Schüler“. Dieser mit Recht geforderten Einhaltung der Jahreskurse standen aber bei Zugrundelegung der meisten bisher gebräuchlichen Lehrbücher im Unterricht mannigfache Hindernisse im Wege. Es gilt also zunächst, diese Hindernisse zu beseitigen. Dazu gehört an erster Stelle eine fasslichere, dem jugendlichen Standpunkte angepasste Darbietung der Elemente, sowohl in der Planimetrie wie auch in der Arithmetik. „In dem bisherigen System“, sagt Prof. Dr. H. Müller sehr treffend in dem Vorwort zur 5. Auflage seiner Elemente der Planimetrie, „bringt das erste Lehrjahr Beweise, welche die meisten Beweise des dritten und vierten Lehrjahrs an Ausdehnung und Schwierigkeit übertreffen“. Es sind dies die Beweise der beiden Hauptsätze über parallele Linien und die Beweise der vier Kongruenzsätze. Für die beiden Hauptsätze über parallele Linien geben die verschiedenen Lehrbücher die verschiedenartigsten, mehr oder minder stichhaltigen Beweise. Unter diesen Beweisen zeichnet sich der Mehler'sche vor allen anderen durch wissenschaftliche Strenge aus; doch ist derselbe für einen Quartaner, der gerade erst angefangen hat, das ihm bis dahin ganz fremde und so eigentümliche Beweisverfahren in der Mathematik kennen zu lernen, viel zu schwer. Bekanntlich beruht der Mehler'sche Beweis auf den beiden Grundsätzen: 1) Zwischen zwei Punkten ist nur eine einzige gerade Linie möglich, und 2) Zu einer geraden Linie lässt sich durch einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt nur eine Parallele ziehen. Wie bereits mehrfach erkannt, ist die pädagogisch unbedingt zu fordernde Vereinfachung der Parallelentheorie nur durch Hinzunahme eines dritten Anschauungssatzes zu erreichen. Ich wähle dazu denjenigen Satz, auf welchem die vom praktischen Zeichner angewandte Herstellung paralleler Linien mittels eines Lineals und eines Winkelhakens beruht, nämlich: 3) Verschiebt man einen Winkel längs des einen Schenkels, so bleibt der andere (freie) Schenkel der ursprünglichen Lage parallel. Mit Zuhülfenahme dieses Grundsatzes lassen sich die beiden Hauptsäze über parallele Linien in einer Weise begründen, die für den jugendlichen Mathematiker leicht verständlich ist, und die gleichzeitig an Strenge des Beweisverfahrens nichts zu wünschen übrig lässt. — Eine ebenso schwierige Partie im Pensum der Quarta, einen Stein des Anstosses mitten „an der schönen Strasse, die zur Geometrie führt“, bilden die Kongruenzsätze. Viele Jahre hindurch habe ich mich bemüht, im Anschluss an Kambly und später an Mehler die Beweise dieser Sätze nach dem euklidischen Beweisverfahren durch Deckung der Dreiecke meinen Quartanern zum Verständnis zu bringen. Doch ist mir dies wohl nie recht gelungen und konnte auch nicht gelingen. Denn diese Beweise sind zu trocken und erwecken bei den Schülern kein Interesse, sie sind ferner für einen Quartaner zu schwer, vor allen Dingen aber ist dies ganze Beweisverfahren zu unnatürlich und umständlich. Viel einfacher und natürlicher gestaltet sich der Beweis der Kongruenzsätze durch die Ausführung der betreffenden Dreieckskonstruktionen und durch den Hinweis auf die Eindeutigkeit derselben. Auf diese Weise gewinnen die Schüler eine schnellere und viel tiefere Einsicht in das Wesen der Kongruenzsätze; die Richtigkeit derselben tritt ihnen so gewissermassen handgreiflich vor Augen. Ganz nebenbei fällt bei diesem Verfahren für die Schüler noch ein beträchtlicher Gewinn ab: Sie lernen, mit Lineal und Zirkel umzugehen, den cm-Massstab, den Transporteur und den Winkelhaken zu gebrauchen, kurz sie lernen geometrisches Zeichnen, das nicht früh genug geübt werden kann und das auch fast sämtlichen Schülern sichtliche Freude bereitet, falls sie sich im Besitze eines guten Reisszeuges und anderer brauchbarer Zeicheninstrumente befinden. Zur Erreichung grösserer Sicherheit in jenen elementaren Dreieckskonstruktionen lasse ich die Schüler noch einfache Auf-

gaben über das allgemeine Viereck und über das Trapez lösen, die sich unmittelbar auf eine der früheren Konstruktionen zurückführen lassen, wie z. B.:

Ein Viereck zu konstruieren aus

a, d, e, α, β; c, e, α, γ, δ; a, b, e, f, γ; b, c, d, f, β; a, b, e, α, δ u. s. w.

Ein Trapez zu konstruieren aus

a, e, α, β; a, c, f, α; a, b, e, f; c, e, f, γ; c, e, β, δ u. s. w.

Die Grösse dieser Stücke wird in Centimetern und Graden angegeben. An Stelle der Analysis bei schwierigeren Aufgaben tritt hier auf der Anfangsstufe eine beliebige Figur der verlangten Art, die Musterfigur oder das Modell, welches genau dieselbe Rolle spielt, wie das Modell auf einem Modellierbogen. Die Konstruktion selbst erfolgt unter alleiniger Anwendung des Zirkels und des Lineals; doch wird die Anwendung des Winkelhakens zur abgekürzten Konstruktion paralleler Linien gestattet.

Sind die Schüler einige Wochen lang in der Lösung dieser Aufgaben geübt worden, so fällt es ihnen leicht, sich in kurzer Zeit die noch übrigen Sätze des Quartapensums mit Verständnis anzueignen, insbesondere also die Sätze über das gleichschenklige Dreieck sowie deren Anwendung zur Lösung weiterer Fundamentalaufgaben. —

Für den in III B beginnenden arithmetischen Unterricht ist die von den neuen Lehrplänen mit Recht gestellte Forderung von Wichtigkeit, dass der Rechenunterricht in den unteren Klassen, insbesondere in Quarta, „mit dem darauf folgenden arithmetischen Unterrichte im Einklange stehe und diesen vorzubereiten und zu unterstützen geeignet sei“. Demgemäss werden bereits in Quinta die Regeln für die Rechnung mit gemeinen und Dezimal-Brüchen zu entwickeln und zu begründen sein, wie dies in vortrefflicher Weise z. B. in dem Rechenbuche von Harms und Kallius geschieht; auch werden diese Regeln bereits hier dem Gedächtnisse in einer Form einzuprägen sein, die auch später im eigentlichen arithmetischen Unterrichte beibehalten werden kann. Von vornherein sind die Schüler mit den wichtigsten technischen Ausdrücken: Summe, Summanden — Differenz, Minuend, Subtrahend — Produkt, Faktoren — Quotient, Dividend, Divisor — Aggregat und Glieder desselben bekannt und vertraut zu machen, auch sind dieselben in der Anwendung von Klammern dauernd zu üben. Insbesondere wird die Berechnung zusammengesetzter Zahlenausdrücke mit ganzen und gebrochenen Zahlen, in denen alle vier Rechnungszeichen gleichzeitig und in Verbindung mit Klammern auftreten, einen wesentlichen Teil des Quartapensums bilden. Die Übung im Analysieren und Berechnen solcher Zahlenausdrücke ist die beste Vorschule zur Arithmetik.

Ist aber durch einen derartigen sachgemäss erteilten Unterricht, der selbstverständlich im allgemeinen nicht einem seminaristisch, sondern einem akademisch geschulten Lehrer zu übertragen ist, eine Summe wertvoller arithmetischer Grundbegriffe bereits gewonnen, so soll der in III B einsetzende arithmetische Unterricht nicht die Fundamente von neuem legen und noch einmal ganz von vorn anfangen, sondern die alten Fundamente benutzen und auf ihnen weiter bauen. Wie viele „Lehrsätze“ und „Formeln“ werden in manchen weit verbreiteten Lehrbüchern aufgestellt und „bewiesen“, die den Schülern längst aus dem Rechenunterricht geläufig oder auch selbstverständlich sind. Man gehe nach einer zweckentsprechenden Wiederholung der vier Grundrechnungsarten und der zugehörigen Terminologie gleich in medias res hinein, führe die Buchstaben (des kleinen lateinischen Alphabets) als allgemeine Zahlzeichen ein und wende sich sodann sofort zu den ersten Lehrsätzen der Arithmetik, die eines wirklichen Beweises bedürfen, nämlich zu den Sätzen über Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen nebst ihren Umkehrungen. Man gelangt dabei bekanntlich zu folgenden wichtigen praktischen Regeln:

1. Hauptregel: Eine Plusklammer wird aufgelöst, indem man dieselbe einfach weglässt; eine Minusklammer wird aufgelöst, indem man die Zeichen erster Stufe innerhalb der Klammer umkehrt und alsdann die Klammer weglässt.

2. Hauptregel: Um mehrere Glieder eines Aggregats in eine Plusklammer einzuschliessen, hat man sie nur mit einer Klammer zu umgeben; um mehrere Glieder eines Aggregats in eine Minusklammer einzuschliessen, hat man die Klammer hinter einem Minuszeichen zu öffnen und die Zeichen aller einzuklammernden Glieder umzukehren. Erforderlichen Falls sind die einzuklammernden Glieder erst so zu ordnen, dass das erste derselben ein additives bezw. subtraktives ist.

Nach gründlicher Einübung dieser Regeln an zahlreichen Beispielen gehe ich zur Einführung der negativen Zahlen und zu der Ableitung der Regeln für die Addition und Subtraktion

relativer Zahlen über; an diese schliesst sich die Addition und Subtraktion von Aggregaten an. Damit ist hinreichendes Material gewonnen, um mit demselben die einfachsten Aufgaben aus der Algebra lösen zu können, die von nun ab einen vorwiegenden Teil des arithmetischen Pensums bildet. Den Schluss dieses Pensums für III B bildet die Multiplikation von Aggregaten und relativen Zahlen, die einfachsten Formeln für $(a+b)^2$ u. s. w. und endlich die Verwandlung der einfachsten Aggregatformen in Produkte, — immer unter gleichzeitiger Anwendung der sich ergebenden Regeln zur Lösung von zahlreichen, sich immer schwieriger gestaltenden Gleichungen. Die Lösung von Gleichungen bereitet den Schülern viel grösseres Interesse, als die Lösung anderer gleich schwieriger Aufgaben, die derselben Unterrichtsstufe angehören. Die Aufgabe z. B., einen der Ausdrücke

$$3.\,(4a+7x)^2-2.\,(2a-5x)(2a+5x)+6.\,(a-6x)(5a+2x) \text{ oder}$$

$$\frac{7a-5}{63a^2-28}+\frac{3a}{12a+8}-\frac{a-3}{42a-28}$$

auf die einfachste Form zu bringen, erfordert genau dieselben Kenntnisse und Fertigkeiten wie die Lösung der Gleichungen

$$4.\,(5x-2)(6x+11)-5.\,(3x+4)^2=3.\,(5x+11)(5x-11) \text{ und}$$

$$\frac{4x-1}{30x-12}-\frac{5x-2}{50x+20}+\frac{25x^2-33x+2}{375x^2-60}=\frac{1}{10},$$

und doch gehen die Schüler an die Lösung solcher Gleichungen mit grösserer Lust heran als an die Aufgaben der vorgenannten Art, weil ihnen bei den Gleichungen das Resultat in viel einfacherer Gestalt entgegentritt und sie ausserdem in der Lage sind, die Richtigkeit desselben durch eine Probe, bei der sie selbst wieder viel lernen können, zu kontrollieren. Das Übungsmaterial wird hier daher vorwiegend der Algebra zu entnehmen sein.

Da die Behandlung der vier Grundrechnungsarten mit relativen Zahlen in dem am hiesigen Progymnasium eingeführten und auch sonst weit verbreiteten Lehrbuche von Mehler trotz der Zusätze in den neuesten Auflagen immer noch zu knapp ausgefallen ist, und da ausserdem dieses Gebiet, insbesondere die Begründung der Regel über die Multiplikation relativer Zahlen, noch heute ein viel umstrittenes Problem pädagogischer Behandlung darbietet, so habe ich es weiter unten versucht, eine zusammenhängende Darstellung und wissenschaftliche Begründung dieser Gesetze zu geben, die sich meiner Ansicht nach viele Jahre lang im Unterricht wohl bewährt hat. Diese Behandlung eines grundlegenden Kapitels aus der Arithmetik macht ebensowenig wie die vorangehende Bearbeitung einiger wichtiger Abschnitte des geometrischen Pensums einen Anspruch auf Originalität und Priorität; sie soll nur zeigen, wie man es machen könne, nicht wie man es machen müsse, um ein sicheres und brauchbares Fundament für das ganze grosse Lehrgebäude der Mathematik zu legen.

In dem planimetrischen Pensum der III B, sowie in dem arithmetischen und planimetrischen Pensum der III A sind durch die neuen Lehrpläne einige Änderungen eingetreten, die notwendig waren, um die Bewältigung des mathematischen Pensums der II B zu ermöglichen.

Von geringer Bedeutung ist die vorgenommene Trennung der Kreislehre in 2 Teile, von denen der erste in III B, der andere in III A durchgenommen werden soll. Unter dem ersten Teil der Kreislehre verstehe ich die Sätze über Sehnen und Tangenten im Kreise, über Centri-, Peripherie- und Tangentenwinkel, sowie endlich die Lösung der zugehörigen wichtigsten Fundamentalaufgaben; alles übrige ist dem 2. Teile zu überweisen.

Von viel grösserer Bedeutung ist die Frage, was unter dem „Notwendigsten über Wurzelgrössen“ und unter den „Anfangsgründen der Ähnlichkeitslehre“ zu verstehen ist.

Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen ist in den neuen Lehrplänen in eigentümlicher Weise auf die Klassen III A, II B und II A verteilt. In III A sollen die Potenzen mit absoluten ganzzahligen Exponenten und das Notwendigste über Wurzelgrössen, in II B die Definition der Potenz mit negativem und gebrochenem Exponenten, sowie der Begriff des Logarithmus nebst Übungen im Rechnen mit Logarithmen, in II A endlich die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen im Zusammenhange durchgenommen werden. Diese Anordnung, welche die Einführung in die Gesetze der Rechnungsarten der dritten Stufe auf drei Jahreskurse verteilt, hat auf den ersten Blick etwas Befremdendes; doch ist sie wohldurchdacht und entschieden dem

alten Verfahren vorzuziehen, bei welchem z. B. mit allen möglichen Wurzelgrössen nach gewissen formalen Gesetzen gerechnet wurde, bevor der Schüler eine Ahnung davon hatte, wie er die Werte der einfachsten Wurzelgrössen, die Quadratwurzeln, berechnen könne. Grade diese Verteilung des in Rede stehenden Unterrichtsstoffes auf 3 Jahreskurse zeigt ebenso wie die in gleicher Weise vorgenommene Trennung des trigonometrischen Pensums auf die Klassen II B, II A und I B, dass diesen Anordnungen der Rat eines praktisch wohl erfahrenen Schulmannes zu Grunde liegt, während dies von Herrn M. Simon in Bezug auf die Trigonometrie gradezu in Abrede gestellt wird. In III A sind zunächst die fünf Potenzgesetze für absolute ganzzahlige Exponenten zu beweisen und an einigen Beispielen einzuüben; die arithmetischen Übungsbücher bringen hier, wie auch zu dem Kapitel über Wurzelgrössen unnötig viel Aufgaben, deren ausführliche Durchnahme leicht langweilig wird. Sodann ist die Definition der Wurzel mit einem beliebigen ganzzahligen Exponenten zu geben und endlich die Berechnung der rationalen und irrationalen Quadratwurzeln zu lehren. Von Wurzelgesetzen kommen hier und für die folgende Klasse nur 2 in Betracht, nämlich $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ und $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, die auf möglichst einfache Weise zu beweisen und insbesondere an Beispielen wie $\sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{3}$ und $\sqrt{3\tfrac{5}{12}} = \tfrac{1}{6} \cdot \sqrt{123}$ praktisch einzuüben sind. In Übereinstimmung mit den neuen Lehrplänen, welche es als zulässig erachten, dass „gewisse Abschnitte aus der Lehraufgabe der II B schon in III A behandelt werden, um jene Klasse thunlichst zu entlasten“, empfiehlt es sich, die Lösung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten schon in III A im Anschluss an die Berechnung der Quadratwurzeln durchzunehmen. Nur wenige Stunden sind dazu erforderlich, und den Schülern macht es Freude, zu sehen, was für Aufgaben sie mit den Quadratwurzeln sowohl in der Algebra als auch in der Planimetrie (hier auf Grund des pythagoreischen Lehrsatzes) bewältigen können.

Die „Anfangsgründe der Ähnlichkeitslehre“ erstrecken sich meiner Ansicht nach nicht so weit, wie dies nach den bisher erschienenen Lehrbüchern*), die nach den neuen Lehrplänen bearbeitet sind, angenommen werden müsste. In allen diesen Lehrbüchern werden ausser den grundlegenden Lehrsätzen über die Proportionalität von Strecken bei zwei sich schneidenen Geraden, die von einem System paralleler Linien durchschnitten werden, und bei einem Strahlenbüschel, das von zwei parallelen Linien durchschnitten wird, noch die vier Ähnlichkeitssätze nach der althergebrachten Methode bewiesen, ferner werden die Lehrsätze über die mittlere Proportionale am rechtwinkligen Dreieck und der Lehrsatz über die harmonische Teilung einer Dreiecksseite durch die Halbierungslinie des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels und seines Nebenwinkels dem Pensum der III A überwiesen. Damit begnügt sich das eine der genannten drei Lehrbücher. Die beiden anderen nehmen ausserdem noch die Proportionalität der Sekanten- und Tangentenabschnitte am Kreise in dies Pensum auf, während endlich der Verfasser des einen Lehrbuches im direkten Widerspruch mit den neuen Lehrplänen so weit geht, auch die Kreisbüschel und ihre Potenzlinie, sowie die Lehre von der stetigen Teilung oder dem goldenen Schnitt der III A aufzubürden, damit in II A „zu einer grösseren Vertiefung in schwierigere Dinge die nötige Zeit frei bleibe“. Damit würde die frühere Lehraufgabe der II A in der Planimetrie ihrem ganzen Umfange nach der III A als wohlthätige Zugabe anheimfallen, und mit einem gewissen Rechte könnte derjenige Mathematiker, der es fertig bekommt, die so erweiterte Lehraufgabe der III A wirklich mit Erfolg zu absolvieren, ohne in eine bodenlose Untiefe oberflächlichen Wissens zu geraten, das Urteil Cremona's über Hesse auf sich beziehen: „Felice la gioventù alemanna che è educata nelle matematiche da tali professori!“ Der Ratschlag, diese Zugabe nur „als Übungsstoff nutzbringender Art zu betrachten“, kann doch wohl kaum in dem Sinne ernst gemeint sein, wie in den methodischen Bemerkungen zu den neuen Lehrplänen; alles ist Übungsstoff, der Pythagoras ebensowohl wie die stetige Teilung einer gegebenen Strecke. Ich bin noch nicht in der glücklichen Lage wie der Herr Verfasser des zuletzt erwähnten Lehrbuches, mein Urteil auf eine mehr als 23-jährige Lehrerfahrung gründen zu können, aber meine 14-jährige Lehrerfahrung giebt mir die felsenfeste Überzeugung, dass es unmöglich ist, das von Herrn Direktor Dr. Holzmüller der III A zuerteilte Lehr-

*) Hercher, Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien; Leipzig, C. Jacobsen, 1893. — Bussler, Die Elemente der Mathematik, Teil I, Pensum für das Untergymnasium; Dresden, L. Ehlermann, 1893. — Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik, 1. Teil; Leipzig, B. G. Teubner, 1894.

pensum in dieser Klasse mit nur einigem Erfolge zu absolvieren. Behält man nur fest das ganz bestimmte Ziel der neuen Lehrpläne im Auge, den aus II B abgehenden Schülern eine wenigstens einigermassen abgeschlossene Vorbildung zu verschaffen, so wird man in III A bei dem an und für sich schon grossen Pensum dieser Klasse nur diejenigen Sätze aus dem Kapitel von der Proportionalität der Strecken und der Ähnlichkeit der Figuren durchnehmen, die im Pensum der II B zur Anwendung gelangen. Es sind dies die bereits oben erwähnten beiden Hauptsätze über die Proportionalität von Strecken bei zwei sich schneidenden Geraden, die von einer Schar paralleler Linien durchschnitten werden, und bei einem Strahlenbüschel, das von zwei parallelen Linien durchschnitten wird, sowie die Umkehrung des ersten dieser beiden Sätze; an diese Sätze schliessen sich die beiden Fundamentalaufgaben: 1) Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu konstruieren, und 2) Eine gegebene Strecke innen (und aussen?) nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen, nebst anderen Konstruktionsaufgaben über Dreiecke und Vierecke zur Anwendung dieser Fundamentalaufgaben. Damit sind die erforderlichen aber auch ausreichenden Grundlagen für die Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren gegeben. Der Begriff der Ähnlichkeit zweier Figuren ist den Schülern bereits bekannt; es kommt nur darauf an, sie zur mathematischen Formulierung dieses Begriffes hinzuführen. Man stelle zu diesem Zwecke dem Schüler die Aufgabe, von der Thür des Klassenzimmers, oder von der Vorderansicht des Ofens oder von sonst einem geeigneten Gegenstande ein Bild auf der Tafel zu entwerfen, welches natürlich wie jedes andere richtig gezeichnete Bild dem abgebildeten Gegenstande ähnlich sein soll. Die Fehler eines unrichtigen Bildes wird der Schüler sofort erkennen. Er wird ein von der Stubenthür entworfenes Bild nicht als ein naturgetreues anerkennen, wenn es nicht die Form eines Rechtecks hat; er wird dasselbe für fehlerhaft erklären, wenn die Höhe etwa nur um ein geringes grösser ist als die Breite, da „die Höhe im Verhältnis zur Breite" zu kein ist. Auf diese Weise gelangt der Schüler von selbst zu der sicheren Erkenntnis, dass zwei Vielecke dann einander ähnlich sind, wenn sie 1) in den gleichliegenden Winkeln übereinstimmen und wenn ausserdem 2) ihre entsprechenden Seiten proportional sind. Hieraus ergiebt sich mit Zuhülfenahme des ersten der oben erwähnten Hauptsätze über die Proportionalität von Strecken, dass Dreiecke schon dann einander ähnlich sind, wenn die erste dieser Bedingungen erfüllt ist; mit anderen Worten, es ist damit einer der vier Ähnlichkeitssätze bewiesen, nämlich: Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen. Die drei anderen Ähnlichkeitssätze kommen auf dieser Unterrichtsstufe nicht zur Anwendung, können also einstweilen übergangen werden. Will man sie jedoch der Vollständigkeit wegen anführen und beweisen, so gebe man beim Beweise dieser Sätze, sowie des Satzes: „Ähnliche Vielecke werden durch die Diagonalen von entsprechenden Eckpunkten aus in ähnliche Dreiecke zerlegt" das bisherige gekünstelte Beweisverfahren auf, das nur als eine Flickarbeit bezeichnet werden kann, und ersetze dasselbe durch ein naturgemässes Beweisverfahren, etwa in der Weise, wie ich dies weiter unten versucht habe. Den Schluss des planimetrischen Pensums der II A bildet der Satz über das Verhältnis der Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke und ähnlicher Polygone; dieser Satz bildet einen notwendigen Bestandteil dieses Pensums nicht nur weil er zur Volumenbestimmung der Pyramide notwendig ist, sondern auch weil sich auf ihn der so wichtige Unterschied zwischen linearer und Flächenvergrösserung gründet.

Nach Absolvierung des Pensums der mittleren Klassen in dem oben angegebenen Umfange stehen der Durchführbarkeit des Pensums der II B keine Hindernisse und Schwierigkeiten mehr im Wege, — falls man sich auf die von den neuen Lehrplänen für diese Klasse aufgestellte Lehraufgabe beschränkt und nicht etwa, wie dies in den Lehrbüchern von Bussler und Holzmüller geschieht, die vollständige Lehre von den Potenzen und Wurzeln in diese Lehraufgabe mit hineinzieht. Die Lehrpläne schreiben als arithmetisches Pensum der II B die Definition der Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten, die Definition des Logarithmus und Übungen im logarithmischen Rechnen vor. Bei strenger Befolgung dieses Lehrganges, die im Interesse der Durchführbarkeit des ganzen Planes dringend zu fordern ist, ist es unvermeidlich, in dem systematischen Aufbau des wissenschaftlichen Systems eine Lücke offen zu lassen, die erst in II A bei einer zusammenfassenden Darstellung der Gesetze über Potenzen, Wurzeln und Logarithmen auszufüllen ist. Nachdem die Potenzen auch für negative und gebrochene Exponenten definiert worden sind, muss die Bemerkung eingeschaltet und mit allem Nachdruck betont werden, dass auch für solche Potenzen die fünf Potenzgesetze, die früher nur für absolute ganzzahlige Exponenten bewiesen wurden, ihre Gültigkeit behalten, dass aber der

Beweis für diese Thatsache erst später erbracht werden wird. Ohne ein solches Zugeständnis an die Methodik ist eine Bewältigung des arithmetischen Pensums der II B meiner Ansicht nach schlechterdings unmöglich. Andererseits reicht aber jene Bemerkung vollkommen aus, um auf den so erweiterten Potenzbegriff und die früheren Potenzgesetze den Begriff des Logarithmus und die Beweise der vier Logarithmengesetze gründen zu können.

Das trigonometrische Pensum der II B beschränkt sich auf die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel und auf die Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke. Das Übungsmaterial, welches man mit diesen geringen Vorkenntnissen bewältigen kann, sobald man in der Handhabung der Logarithmentabellen der trigonometrischen Funktionen einige Gewandtheit und Sicherheit erreicht hat, ist ein überaus grosses und interessantes, sodass eine Überschreitung dieser Grenze gar nicht wünschenswert erscheint.

In der Körperlehre ist der Schwerpunkt auf die Berechnung der Oberflächen und Inhalte der einfachsten Körper zu legen; es sind also der Reihe nach das rechtwinklige Parallelepipedon, das Prisma, die Pyramide, der Cylinder, der Kegel und die Kugel zu behandeln. Dabei ist es durchaus nicht nötig, nach dem Vorgange von Reidt und Schellen*) die Formeln zur Berechnung des Rauminhaltes dieser Körper den Schülern ohne Beweis zu geben und dadurch die Behandlung der Körperlehre fast auf das Niveau der Volksschule herabzusetzen, sondern man ist sehr wohl in der Lage, den Schülern die Ableitung dieser Formeln zum Verständnis zu bringen. Am schnellsten und sichersten erreicht man dieses Ziel bei ausgiebiger Verwendung des Cavalieri'schen Prinzipes und bei fortwährender Benutzung einer Sammlung von geeigneten Körpermodellen; eine wirksame Unterstützung könnte diesem Gebiet des mathematischen Unterrichts durch den Zeichenunterricht zuteil werden. Dass bei einer derartigen Behandlung der Körperlehre kein Raum ist für die eigentlichen Grundlagen einer wissenschaftlichen Stereometrie, für die Lehre von den gegenseitigen Beziehungen der Grundgebilde — Punkt, Gerade und Ebene im Raum —, dass vielmehr die notwendigen Grundbegriffe nur auf die Anschauung zu begründen sind, ist kein Schade. Nicht darauf kommt es hier an, die Schüler zu einer „wahrhaft philosophischen Durchdringung dieser Grundbegriffe" **) anzuleiten, sondern darauf, ihnen ein Wissen zu übermitteln, welches sie jederzeit in praktisches Können umzusetzen imstande sind.

Zweiter Teil.

a) Planimetrie.

§ 1. Grundsätze:

1) Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich; oder in anderer Fassung:

Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden.

2) Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte.

3) Durch einen Punkt ausserhalb einer geraden Linie lässt sich zu derselben nur eine Parallele ziehen.

4) Verschiebt man einen Winkel längs des einen Schenkels, so behält der andere (freie) Schenkel seine Richtung bei, bleibt also der ursprünglichen Lage parallel.

§ 2. Lehrsatz (1. Hauptsatz über parallele Linien): Sind zwei Gegenwinkel gleich, oder sind zwei Wechselwinkel gleich, oder betragen zwei entgegengesetzte Winkel zusammen 2 R, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Vor. $\alpha = \varepsilon$. Beh. $AB \parallel CD$. (Fig. 1.)

Bew. Verschiebt man den Winkel α längs der Linie EF bis sein Scheitelpunkt O nach Q gelangt, so bleibt derselbe seiner Grösse nach unverändert, deckt sich also in seiner neuen Lage

---

*) Reidt, Einleitung in die Trigonometrie und Stereometrie für die Untersekunda höherer Lehranstalten; Berlin, Grote, 1892. — Schellen, die Berechnung der Flächen- und Körperinhalte; Münster, Coppenrath, 1892.

**) Vgl. den oben erwähnten Aufsatz in der Zeitschrift für das Gymnasialwesen, S. 595.

mit dem ihm gleichen Winkel ε; mithin erhält der Strahl OB die Lage von QD. Nach dem 4. Grundsatze muss daher die neue Lage des freien Winkelschenkels QD der ursprünglichen Lage OB parallel sein. — Setzt man voraus, dass zwei Wechselwinkel gleich sind, oder dass zwei entgegengesetzte Winkel zusammen 2 R betragen, so ergiebt sich hieraus (nach Mehler § 7) zunächst die Gleichheit zweier Gegenwinkel und aus dieser, wie soeben gezeigt wurde, die Behauptung.

§ 3. Lehrsatz (2. Hauptsatz über parallele Linien): Werden zwei parallele Linien von einer dritten Linie durchschnitten, so sind alle Paare von Gegenwinkeln und Wechselwinkeln einander gleich, und je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen 2 R.

Vor. AB ‖ CD Beh. $\alpha = \varepsilon$ u. s. w. (Fig. 1.)
$\alpha = \eta$ u. s. w.
$\alpha + \vartheta = 2$ R. u. s. w.

Bew. Nach einem bekannten Hülfssatze (Mehler § 7) genügt es, die Gleichheit zweier Gegenwinkel zu beweisen. Um z. B. zu zeigen, dass $\alpha = \varepsilon$ ist, verschiebe man wieder den Winkel α längs der Linie EF, bis sein Scheitelpunkt O auf den Punkt Q fällt; dann bleibt nach dem 4. Grundsatze der freie Schenkel OB der ursprünglichen Lage stets parallel, deckt sich also schliesslich mit der zu AB parallelen Linie QD, da sich nach dem 3. Grundsatze durch den Punkt Q zu der Linie AB nur eine Parallele ziehen lässt.

§ 4. Die Kreislinie. Kreis und Strahl.

1. Dreht man eine Strecke MA um den einen Endpunkt M, so beschreibt der andere Endpunkt A eine krumme Linie, deren sämtliche Punkte vom Punkte M dieselbe Entfernung haben. Man nennt diese Linie eine Kreislinie (einen Kreis), den Punkt M den Mittelpunkt oder das Centrum und die Strecke MA oder irgend eine andere Strecke, welche einen beliebigen Punkt der Kreislinie mit dem Mittelpunkte verbindet, den Radius oder Halbmesser des Kreises.

Ein von zwei beliebigen Punkten A und B begrenzter Teil einer Kreislinie heisst ein Kreisbogen. Centriwinkel, Sehne, Halbkreis.

Dreht sich ein Kreisbogen AB um den Mittelpunkt M des zugehörigen Kreises, so verschiebt sich derselbe längs der Kreislinie. Gelangt bei einer solchen Drehung der Punkt A in die Lage von C und B nach D, so deckt sich sowohl der Bogen AB mit dem Bogen CD, als auch die Sehne AB mit der Sehne CD, da es zwischen den beiden Punkten C und D nur eine einzige gerade Linie giebt. Hieraus folgt:

Zu gleichen Kreisbögen gehören gleiche Sehnen, und umgekehrt:

Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Kreisbögen.

2. Jeder Strahl, der von einem beliebigen, innerhalb eines Kreises gelegenen Punkte ausgeht, schneidet den Kreis nur in einem Punkte. — Jeder Strahl, der von einem beliebigen, ausserhalb eines Kreises gelegenen Punkte ausgeht, schneidet den Kreis entweder in zwei Punkten oder in keinem Punkte (in zwei Punkten, wenn der Abstand des Mittelpunktes vom Strahle kleiner ist als der Radius, in keinem Punkte, wenn dieser Abstand grösser ist als der Radius).

§ 5. Die drei ersten Fundamentalaufgaben.

Unter einer geometrischen Konstruktion versteht man die Zeichnung einer Figur von bestimmter Beschaffenheit unter alleiniger Anwendung des Lineals und des Zirkels. Die einfachsten Konstruktionsaufgaben sind folgende:

1. Fund.-Aufg.: Eine gegebene Strecke auf einer geraden Linie von einem gegebenen Punkte aus abzutragen.

Auflösung: Gegeben sei die gerade Linie AB mit dem Punkte C und die Strecke a. Man beschreibe mit der gegebenen Strecke a als Radius um den Punkt C als Mittelpunkt nach der einen oder anderen Seite der geraden Linie AB einen Kreisbogen, der dieselbe im Punkte D schneidet. Dann ist CD = a.

2. Fund.-Aufg.: An eine gerade Linie in einem gegebenen Punkte einen gegebenen Winkel anzutragen. (Fig. 2.)

Aufl.: Gegeben sei der Winkel α und ausserdem eine gerade Linie LM mit dem Punkte P. Man beschreibe um den Scheitelpunkt A des Winkels α mit einem beliebigen Radius einen Kreisbogen, welcher die Schenkel dieses Winkels in den Punkten B und C schneidet. Ferner beschreibe man mit demselben Radius auch um den Punkt P einen Kreisbogen, welcher die Linie LM im Punkte R schneidet. Endlich beschreibe man noch mit dem Abstande der beiden Punkte

B und C um den Punkt R einen Kreisbogen, der den vorigen Kreisbogen im Punkte S schneidet, und ziehe den Strahl PS; dann ist ∢RPS der verlangte.

Bew.: Legt man den Winkel α so an die Linie LM, dass sein Scheitelpunkt A auf den Punkt P und der Schenkel AB in die Lage des Strahles PM fällt, so deckt sich die Kreislinie BC mit der Kreislinie RS, da beide mit demselben Radius beschrieben sind. Es decken sich aber auch die Endpunkte des Kreisbogens BC mit denen des Kreisbogens RS, da die diesen Kreisbögen entsprechenden Sehnen nach Konstr. einander gleich sind. Da nun A auf P und C auf S fällt, so deckt sich nach dem 1. Grundsatze auch der Strahl AC mit dem Strahle PS. Also sind die beiden Winkel SPR und α einander gleich, da ihre Schenkel sich decken.

3. Fund.-Aufg.: Zu einer geraden Linie durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu ziehen. (Fig. 3.)

Aufl.: Gegeben sei die gerade Linie AB und ausserhalb derselben der Punkt O. Man verbinde den Punkt O mit einem beliebigen Punkte P der Linie AB durch eine gerade Linie und verlängere dieselbe beliebig weit über den Punkt O hinaus durch den Strahl OE; ferner trage man den Winkel OPB an diesen Strahl OE im Punkte O an, sodass er ein Gegenwinkel von OPB wird. Dann ist der freie Schenkel dieses Winkels OD, bezw. CD die verlangte Parallele.

Bew.: CD ist parallel zu AB, da nach Konstruktion die Gegenwinkel EOD und OPB einander gleich sind (§ 2).

§ 6. Die vier elementaren Dreiecksaufgaben.

1. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und zwei Winkeln.

1. Fall: Gegeben seien eine Seite und die beiden anliegenden Winkel [$c = 2{,}7$ cm; $\alpha = 100^0$; $\beta = 29^0$]. (Fig. 4.)

Konstr.: Man zeichne eine Strecke $AB = c$ (1. Fund-Aufg.), trage an dieselbe im Punkte A den Winkel α und nach derselben Seite von AB in B den Winkel β an (2. Fund-Aufg.) und nenne den Schnittpunkt der beiden freien Winkelschenkel C; dann ist △ABC das verlangte. —

Da sich die beiden freien Winkelschenkel nach dem 1. Grundsatze nur in einem einzigen Punkte schneiden können, so ist das Dreieck durch die gegebenen drei Stücke eindeutig bestimmt. —

2. Fall: Gegeben seien eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel [$c = 2{,}9$ cm; $\alpha = 23^0$; $\gamma = 105^0$]. (Fig. 5.)

Konstr.: Man zeichne eine Strecke $AB = c$, trage an dieselbe im Punkte A den Winkel α an und bezeichne einen beliebigen Punkt des freien Winkelschenkels mit C′; ferner trage man an C′A im Punkte C′ den Winkel γ an und ziehe zu dem freien Schenkel dieses Winkels C′D durch den Punkt B die Parallele (3. Fund-Aufg.), welche den Strahl AC′ im Punkte C schneidet. Da alsdann nach dem 2. Hauptsatze über parallele Linien auch ∢$ACB = AC'D = \gamma$ ist, so ist △ABC das verlangte. —

Da sich nach dem 3. Grundsatze zu der Linie C′D durch den Punkt B nur eine Parallele ziehen lässt, und da diese Parallele den Strahl AC′ nur in einem einzigen Punkte schneidet, so ist durch die gegebenen Stücke der Punkt C und somit auch das ganze Dreieck wiederum eindeutig bestimmt.

2. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel [$a = 2{,}7$ cm; $b = 1{,}6$ cm; $\gamma = 73^0$].

Konstr.: Man zeichne eine Strecke $AC = b$, trage an dieselbe im Punkte C den Winkel γ an und mache den freien Winkelschenkel $CB = a$. Verbindet man noch A mit B durch eine gerade Linie, so ist ABC das verlangte Dreieck. —

Da sich die beiden Punkte A und B nur durch eine einzige gerade Linie verbinden lassen, so ist durch die gegebenen drei Stücke die dritte Seite AB und somit auch das ganze Dreieck wieder eindeutig bestimmt.

3. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der grösseren oder kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel.

1. Fall: Gegeben seien 2 Seiten und der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel [$a = 2{,}6$ cm; $b = 1{,}7$ cm; $\alpha = 42^0$]. (Fig. 6.)

Konstr.: Man zeichne eine Strecke $AC = b$, trage an dieselbe im Punkte A den Winkel α an und beschreibe um den Punkt C mit der Strecke a einen Kreisbogen, welcher den freien Schenkel jenes Winkels im Punkte B schneidet. Verbindet man noch A mit B durch eine gerade Linie, so ist △ABC das verlangte. —

Da nach Vor. $b < a$ ist, so liegt der Punkt A innerhalb des um C mit a beschriebenen Kreises; mithin kann jeder von A ausgehende Strahl, insbesondere der freie Schenkel des an AC in A angetragenen Winkels α den Kreis nur in einem einzigen Punkte schneiden (§ 4, 2), und es ist daher auch in diesem Falle der Punkt B und somit das ganze Dreieck eindeutig bestimmt.

2. Fall: Gegeben seien 2 Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel [$a = 3,5$ cm; $b = 1,7$ cm; $\beta = 24^0$]. (Fig. 7.)

Konstr.: Man zeichne eine Strecke BC = a, trage an dieselbe im Punkte B den Winkel β an und beschreibe um den Punkt C mit der Strecke b einen Kreisbogen, welcher (wenn b grösser ist als der Abstand des Punktes C von dem freien Schenkel jenes Winkels) den freien Winkelschenkel in zwei Punkten A und A′ schneidet. Verbindet man endlich einen dieser beiden Punkte mit dem Punkte C, so enthält sowohl das Dreieck ABC als auch das Dreieck A′BC die gegebenen Stücke. —

Nach der Vor. ist $a > b$, also liegt der Punkt B ausserhalb des um C mit b beschriebenen Kreises. Da nun (nach § 4, 2) jeder von B ausgehende Strahl den Kreis in zwei Punkten schneidet, wenn nur der Radius b dieses Kreises hinreichend gross ist, so gilt dies auch von dem freien Schenkel des Winkels β. Mithin ist in diesem Falle der Punkt A im allgemeinen zweideutig bestimmt, d. h. es giebt 2 verschiedene Dreiecke ABC und A′BC, welche die gegebenen Stücke enthalten.

4. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten [$a = 2,4$ cm; $b = 1,8$ cm; $c = 3,5$ cm]. (Fig. 8.)

Konstr.: Man zeichne eine Strecke AB = c und beschreibe um A mit der Strecke b, sowie um B mit der Strecke a Kreisbögen, welche sich auf der einen Seite der Linie AB im Punkte C, auf der anderen im Punkte C′ schneiden. Verbindet man einen dieser beiden Punkte mit A und B, so ist ABC, bezw. ABC′ das verlangte Dreieck. —

Da sich die beiden um A und B beschriebenen Kreise sowohl auf der einen wie auch auf der anderen Seite der Linie AB in je einem Punkte C und C′ schneiden, so giebt es zunächt 2 Dreiecke, welche die gegebenen Stücke enthalten. Legt man jedoch die zu beiden Seiten der Linie AB liegenden Teile der Figur auf einander, indem man den einen Teil um die Linie AB herumklappt, bis er auf den anderen Teil zu liegen kommt, so deckt sich der Kreisbogen DC mit DC′ und der Kreisbogen EC mit EC′ (vgl. § 4, 1), also deckt sich auch C mit C′, sodass sich die beiden Dreiecke ABC und ABC′ nur durch ihre Lage unterscheiden, sonst aber kongruent sind.

§ 7. Die vier Kongruenzsätze.

Aus den im vorigen Paragraphen ausgeführten Konstruktionsaufgaben ergab sich, dass ein Dreieck eindeutig bestimmt ist, wenn von demselben entweder

1) eine Seite und zwei Winkel, oder
2) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder
3) zwei Seiten und der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel, oder endlich
4) die drei Seiten

gegeben sind. Zeichnet man nun aus je drei solchen Stücken zwei Dreiecke an verschiedenen Stellen, so können sich diese beiden Dreiecke nur durch ihre verschiedene Lage unterscheiden, müssen aber, wenn man sie passend auf einander legt, zur Deckung gelangen, d. h. kongruent sein So erhält man die folgenden Kongruenzsätze:

1. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und zwei Winkeln.

2. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

3. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel. — Die Übereinstimmung zweier Dreiecke in zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist zur Kongruenz derselben nicht ausreichend.

4. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in den drei Seiten.

§ 8. Lehrsatz: Ähnliche Vielecke werden durch die von entsprechenden Eckpunkten ausgehenden Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

Vor.: Sechseck ABCDEF $\sim$ A'B'C'D'E'F'. (Fig. 9.)

Beh.: $\triangle$ABC $\sim$ A'B'C', $\triangle$ACD $\sim$ A'C'D' u. s. w.

Bew.: Trägt man eine Seite des zweiten Sechsecks A'B'C'..., etwa die Seite A'B', auf der entsprechenden Seite AB des ersten Sechsecks ABC... von A bis L ab und zieht durch L zu BC die Parallele LM, durch M zu CD die Parallele MN u. s. w., so entsteht ein drittes Sechseck ALMNOP, welches dem 2. Sechseck kongruent ist. Diese beiden Sechsecke stimmen nämlich zunächst in den Winkeln überein; denn die Winkel des zweiten Sechsecks sind infolge der Vor. denen des 1. bezw. gleich, während die Winkel des 3. Sechsecks ebenfalls denen des 1. gleich sind als Gegenwinkel an parallelen Linien oder als Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln. Sodann stimmen beide Sechsecke auch in den Seiten überein. Denn infolge der Vor. sind die Seiten des 2. Sechsecks, und nach einem bekannten Lehrsatze auch die Seiten des 3. Sechsecks den entsprechenden Seiten des 1. Sechsecks proportional, also sind auch die Seiten des 2. Sechsecks denjenigen des 3. proportional, d. h. es verhält sich

$$AL : A'B' = LM : B'C' = MN : C'D' \text{ u. s. w.};$$

nun sind aber zwei entsprechende Seiten dieser beiden Sechsecke, nämlich die Seiten AL und A'B' einander gleich, also gilt dies auch von je zwei anderen entsprechenden Seiten. — Da somit das 2. Sechseck dem dritten kongruent ist, und da ferner die Teildreiecke des 3. Sechsecks denen des 1. ähnlich sind, so sind auch die Teildreiecke des 2. Sechsecks den entsprechenden Dreiecken des 1. Sechsecks ähnlich.

§ 9. Die vier Ähnlichkeitssätze.

Nach der Erklärung der Ähnlichkeit zweier Vielecke sind zwei Dreiecke einander ähnlich wenn sie in den entsprechenden Winkeln und Seitenverhältnissen übereinstimmen; es müssen also, wenn man die Dreiecksseiten mit a, b, c bezw. a', b', c' und die Winkel mit α, β, γ bezw. α' β' γ, bezeichnet, folgende 6 Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\begin{array}{ll} b : c = b' : c' & \alpha = \alpha' \\ c : a = c' : a' & \beta = \beta' \\ a : b = a' : b' & \gamma = \gamma'. \end{array}$$

Da sich aus zweien dieser Proportionen die dritte von selbst ergiebt (so erhält man z. B. die dritte Proportion durch Multiplikation der beiden ersten), und da ferner aus der Gleichheit zweier Winkelpaare auch die des dritten folgt, so genügt zur Ähnlichkeit zweier Dreiecke schon die Gleichheit zweier Seitenverhältnisse und zweier Winkel.

Auf Grund der 4 Kongruenzsätze lässt sich jedoch zeigen, dass im allgemeinen schon das Bestehen von nur 2 dieser vier Bedingungen die Ähnlichkeit der Dreiecke zur Folge hat.

Zieht man nämlich im Dreiecke ABC zu einer Dreiecksseite AB (Fig. 10) eine Parallele DE, so ist nach dem bereits mehrfach erwähnten Lehrsatze

$$\triangle CDE \sim ABC.$$

Zeichnet man nun ein dem Dreiecke CDE konguentes Dreieck A'B'C', welches also mit dem Dreiecke CDE entweder

in 1 Seite und 2 Winkeln, oder
„ 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder
„ 2 Seiten und dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel, oder endlich
„ den 3 Seiten

übereinstimmt, so wird auch das Dreieck A'B'C' dem Dreiecke ABC ähnlich sein. Aus den 4 Kongruenzsätzen ergeben sich daher, wenn man in ihnen die Gleichheit zweier entsprechenden Seitenpaare durch die Verhältnisgleichheit derselben ersetzt, folgende 4 Ähnlichkeitssätze:

1. Ähnlichkeitssatz: Dreiecke sind ähnlich, wenn die Winkel des einen denen des anderen gleich sind.

2. Ähnlichkeitssatz: Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

3. Ähnlichkeitssatz: Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnis zweier Seiten und dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

4. Ähnlichkeitssatz: Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen denen des anderen proportional sind.

---

b) Arithmetik.

§ 10. Die Addition relativer Zahlen.

Um irgend zwei relative Zahlen zu addieren, denkt man sich dieselben in ihre Einheiten zerlegt, setzt also z. B. statt $+5$ das fünffache der positiven Einheit $+1$, statt -5 das fünffache der negativen Einheit -1, und verfährt sodann in folgender Weise. Es ist z. B.

$(+7)+(+5)$ (gelesen plus 7 dazu addiert $+5$) gleich 7 positiven Einheiten, dazu addiert 5 positive Einheiten, d. h. $= 12$ positiven Einheiten oder gleich der Zahl $+12$.

$(-7)+(-5)$ gleich 7 negativen Einheiten, dazu addiert 5 negative Einheiten, d. h. $= 12$ negativen Einheiten oder gleich der Zahl -12.

$(+7)+(-5)$ gleich 7 positiven Einheiten, dazu addiert 5 negative Einheiten. Nun hebt sich aber beim Addieren je eine positive Einheit gegen eine negative Einheit (ebenso wie 1 Schritt vorwärts und 1 Schritt rückwärts, 1 M Einnahme und 1 M Ausgabe u. dgl.); also heben sich alle 5 negativen Einheiten gegen ebensoviel positive Einheiten, und es bleiben demnach 2 positive Einheiten übrig, d. h. es kommt heraus die Zahl $+2$.

$(-7)+(+5)$ gleich 7 negativen Einheiten, dazu addiert 5 positive Einheiten. Hier heben sich sämtliche 5 positive Einheiten gegen ebensoviel negative Einheiten, sodass noch 2 negative Einheiten übrig bleiben; mithin hat diese Summe den Wert -2.

Allgemein gelten für die Addition relativer Zahlen folgende Formeln:

$$(+a)+(+b) = +(a+b) = a+b$$
$$(-a)+(-b) = -(a+b)$$
$$\left.\begin{array}{l}(+a)+(-b) = +(a-b) = a-b \\ (-a)+(+b) = -(a-b)\end{array}\right\} \text{falls } a > b \text{ ist.}$$

Denn die Summe von a und b positiven oder negativen Einheiten enthält $a+b$ positive bezw. negative Einheiten. Bildet man aber die Summe von a positiven und b negativen Einheiten und beachtet dabei, dass die Summe einer positiven Einheit und einer negativen gleich 0 ist, so heben sich, falls $a > b$ vorausgesetzt wird, die b negativen Einheiten gegen ebensoviel positive Einheiten auf, und es bleiben $a-b$ positive Einheiten übrig; addiert man hingegen a negative und b positive Einheiten, so heben sich unter derselben Voraussetzung die b positiven Einheiten gegen ebensoviel negative Einheiten auf, und es bleiben $a-b$ negative Einheiten übrig.

Fasst man die beiden ersten, desgl. die beiden letzten der obigen vier Formeln zusammen, so erhält man folgende

3. Hauptregel: Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge addiert und dieser Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen giebt.

Zwei Zahlen mit ungleichen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge von einander subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen der (dem absoluten Betrage nach) grösseren Zahl giebt.

§ 11. Die Subtraktion relativer Zahlen.

Die Aufgabe der Subtraktion relativer Zahlen lässt sich auf die Aufgabe der Addition zurückführen. Es ist nämlich, wenn der Minuend m eine beliebige absolute oder relative Zahl bedeutet,

$$m-(+a) = m+(-a)$$
$$m-(-a) = m+(+a),$$

d. h. in Worten:

4. Hauptregel: Eine relative Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit umgekehrtem Vorzeichen addiert.

Denn nach der Erklärung der Subtraktion muss das auf der rechten Seite stehende Resultat zum Subtrahend addiert den Minuend geben. Dies ist aber in der That der Fall, da

$$[m + (-a)] + (+a) = m + (-a) + (+a) = m, \text{ und}$$
$$[m + (+a)] + (-a) = m + (+a) + (-a) = m \text{ ist.}$$

§ 12. *Die Addition und Subtraktion von Aggregaten.*

Durch Umkehrung der 1. und 3. Formel in § 10 ergiebt sich, dass

$$1) \begin{cases} a + b = (+a) + (+b) \\ a - b = (+a) + (-b) \end{cases}$$

ist. Man kann also statt der Summe oder Differenz zweier absoluten Zahlen stets die Summe von zwei relativen Zahlen setzen. Ebenso kann man allgemein ein beliebiges Aggregat, dessen Glieder absolute Zahlen sind, durch eine Summe von lauter relativen oder algebraischen Zahlen ersetzen, z. B.

$$2)\ a - b + c - d - e = (+a) + (-b) + (+c) + (-d) + (-e).$$

Einen Ausdruck von der Form der rechten Seite dieser Gleichung nennt man eine *algebraische Summe*. Man kann somit stets ein Aggregat durch eine algebraische Summe ersetzen, und umgekehrt. In dem ersten Falle (Verwandlung eines Aggregats in eine algebraische Summe) hat man sämtliche Rechnungszeichen erster Stufe durch die entsprechenden Vorzeichen zu ersetzen, dem Anfangsgliede, falls dasselbe eine absolute Zahl ist, das positive Vorzeichen zu geben und endlich die so entstandenen relativen Zahlen durch Additionszeichen zu verbinden: im zweiten Falle (Verwandlung einer algebraischen Summe in ein Aggregat) hat man die Additionszeichen zwischen den einzelnen relativen Zahlen wegzulassen, desgleichen auch das Vorzeichen des Anfangsgliedes, falls dasselbe positiv ist, und endlich die übrigen Vorzeichen als Rechnungszeichen aufzufassen.

Hiernach kann man bei der *Addition und Subtraktion zweier Aggregate*, z. B

$$(7a - 3b - 4c + 5d) \pm (4a - 5b + 9c - d)$$

in folgender Weise verfahren:

Man schreibt die Aggregate so unter einander, dass die Glieder mit denselben Hauptfaktoren unter einander stehen, fasst sodann jedes einzelne Aggregat als eine algebraische Summe, d. h. die Rechnungszeichen als Vorzeichen auf, wobei man sich vor dem ersten Gliede ein positives Vorzeichen nötigenfalls zu ergänzen und die einzelnen relativen Zahlen durch Additionszeichen *verbunden zu denken* hat, und addiert oder subtrahiert die einzelnen unter einander stehenden Glieder nach den obigen Regeln für die Addition und Subtraktion relativer Zahlen (3. und 4. Hauptregel). Das Resultat erscheint dann zunächst in Form einer algebraischen Summe, wofür man wieder das entsprechende Aggregat zu schreiben hat. Schema für die

Addition:	$+7a$	$-3b$	$-4c$	$+5d$	
	$+4a$	$-5b$	$+9c$	$-d$	
	$+11a$	$-8b$	$+5c$	$+4d$	$= 11a - 8b + 5c + 4d.$

Subtraktion:	$+7a$	$-3b$	$-4c$	$+5d$	
	$+4a$	$-5b$	$+9c$	$-d$	
	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	
	$+3a$	$+2b$	$-13c$	$+6d$	$= 3a + 2b - 13c + 6d.$

§ 13. *Die Multiplikation zweier Aggregate mit einander und die Multiplikation relativer Zahlen.*

1. Aus der Definition des Produktes ergiebt sich, dass

$$(a + b - c).\ x = ax + bx - cx$$

ist, d. h. in Worten:

5. *Hauptregel: Ein Aggregat wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied mit derselben multipliziert und die einzelnen Teilprodukte addiert oder subtrahiert.*

Setzt man in obiger Formel an Stelle von x ein Aggregat mehrerer absoluter Zahlen, z. B. $d - e + f$, so wird

$$(a + b - c) . (d - e + f) = a . (d - e + f) + b . (d - e + f) - c . (d - e + f);$$

der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber nach der vorigen Hauptregel

$$= (ad - ae + af) + (bd - be + bf) - (cd - ce + cf).$$

Löst man endlich in diesem Aggregat die Klammern auf, so ergiebt sich

$$(a + b - c) . (d - e + f) = ad - ae + af + bd - be + bf - cd + ce - cf,$$

d. h. in Worten:

6. *Hauptregel: Zwei Aggregate werden mit einander multipliziert, indem man jedes Glied des einen Aggregats mit jedem Gliede des anderen multipliziert und die einzelnen Teilprodukte addiert oder subtrahiert.*

Um zu entscheiden, ob in dem resultierenden Aggregat die einzelnen Glieder additiv oder subtraktiv zu setzen sind, denke man sich wieder (nach § 12) sowohl die beiden Aggregate auf der linken, als auch das Aggregat auf der rechten Seite durch die entsprechenden algebraischen Summen ersetzt. Vergleicht man dann beide Seiten jener Gleichung mit einander, so erkennt man, dass irgend ein Teilprodukt auf der rechten Seite das Vorzeichen + hat, wenn die Faktoren desselben auf der linken Seite gleiche Vorzeichen besitzen; hingegen hat das Teilprodukt das Vorzeichen —, wenn die Faktoren desselben auf der linken Seite entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Demnach gilt für die *Multiplikation relativer Zeichen* folgende

Vorzeichenregel: Zwei relative Zahlen werden mit einander multipliziert, indem man ihre absoluten Beträge mit einander multipliziert und diesem Produkte das positive oder negative Vorzeichen giebt, je nachdem die beiden Faktoren gleiche oder ungleiche Vorzeichen besitzen. Es ist also

$$(+a) . (+b) = +ab$$
$$(-a) . (-b) = +ab$$
$$(+a) . (-b) = -ab$$
$$(-a) . (+b) = -ab.$$

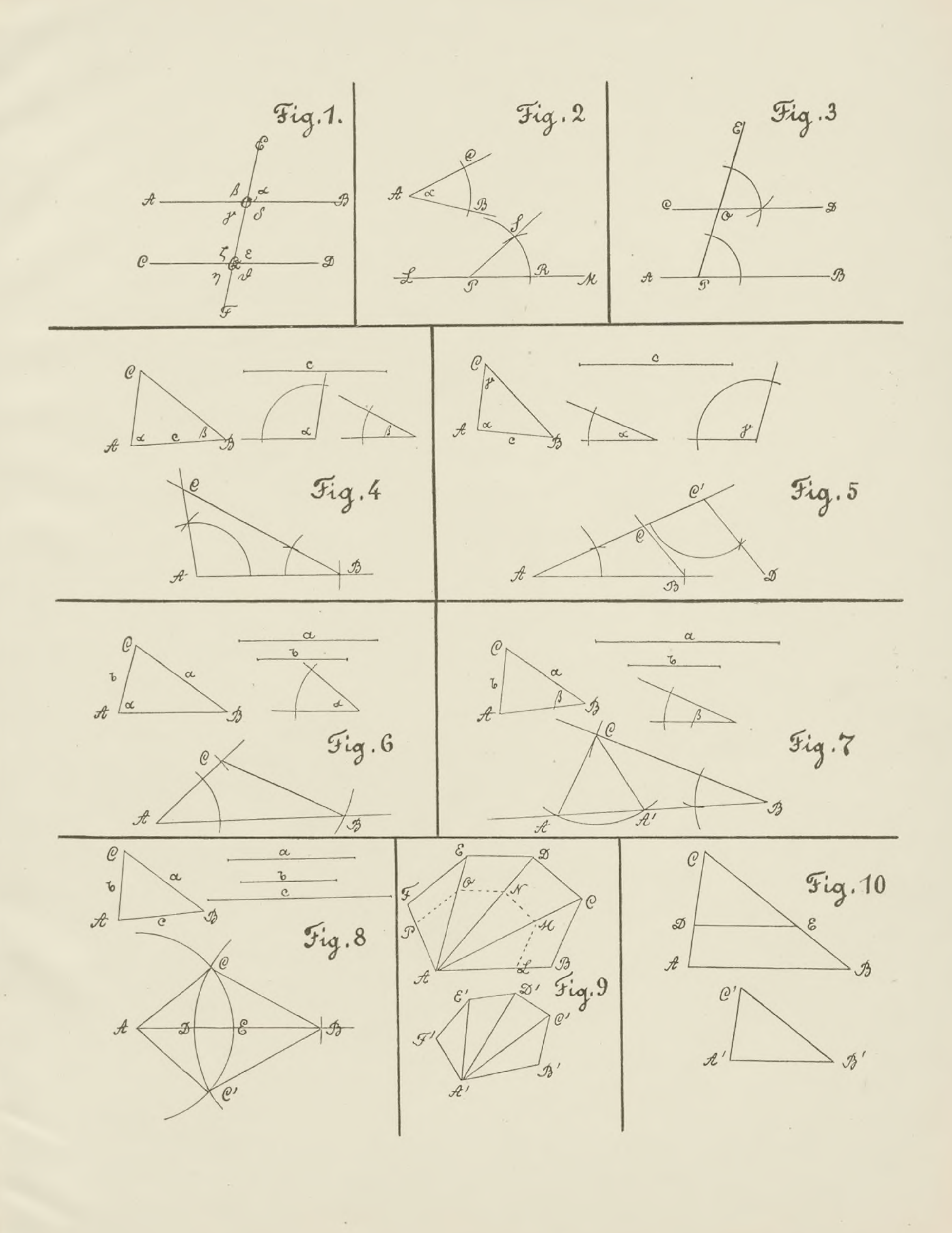
3. Hiernach hat man bei der Multiplikation zweier Aggregate folgendes Verfahren einzuschlagen:

Man denke sich die beiden Aggregate durch algebraische Summen ersetzt (indem man die Rechnungszeichen als Vorzeichen auffasst), multipliziere jedes Glied der einen Summe mit jedem Gliede der anderen Summe nach obiger Vorzeichenregel und ersetze schliesslich in diesen Teilprodukten die einzelnen Vorzeichen wieder durch die entsprechenden Rechnungszeichen. So ist z. B.

$$\begin{array}{rl} (5x - 3y - z) . (2x - y + 7z) = & +10x^2 - 6xy - 2xz \\ & \quad - 5xy \quad + 3y^2 \quad + yz \\ & \quad\quad + 35xz \quad - 21yz - 7z^2 \\ \hline = & 10x^2 - 11xy + 33xz + 3y^2 - 20yz - 7z^2 \\ = & 10x^2 + 3y^2 - 7z^2 - 20yz + 33xz - 11xy . \text{ —} \end{array}$$

Für die Division relativer Zahlen gilt dieselbe Vorzeichenregel wie für die Multiplikation.

DRUCK VON EMIL HERRMANN SEN., LEIPZIG.


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10